

УДК 621.396.1

## МЕТОД ГЛАВНЫХ ИНФОРМАТИВНЫХ КОМПОНЕНТ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ (СИСТЕМАТИЗИРОВАННЫЙ ОБЗОР)

А. Я. КАЛЮЖНЫЙ

*Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского»,  
Украина, Киев, 03056, пр-т Победы, 37*

**Аннотация.** Представлен метод Главных Информативных Компонент РИС (Principal Informative Components) для задач статистических измерений, в которых подлежащий измерению сигнал непосредственно не наблюдается. К таким случаям относятся восстановление изображений, идентификация систем, обращение каналов связи, томография сред и др. Общей особенностью таких задач является, как правило, неустойчивость их решений к малым изменениям исходных данных, что обычно требует привлечения специальных методов регуляризации. Суть метода РИС состоит в использовании декомпозиции сигналов в специальных базисах, сформированных из собственных векторов информационного оператора Фишера. Эти базисы родственны известному в статистике методу Главных Компонент РСА (Principal Components Analysis), однако имеют несколько иной смысл по сравнению с ним. В обзоре показано, что за счет специальных правил отбора координатных векторов, возможно, во-первых, гарантировать устойчивость оценки сигнала к непредсказуемым факторам задачи, во-вторых, обеспечить существенное снижение общей погрешности измерений по сравнению с «прямыми» оценками сигнала, т. е. без использования базисных представлений. Дано обоснование применения метода РИС для задач линейного и нелинейного оценивания. Также рассмотрена комбинированная методика оптимизации координатного базиса, которая сочетает преимущества физического подхода (наглядность, экономичность) с преимуществами статистико-информационного подхода (минимизация статистических погрешностей). Указанная методика основана на проектировании произвольного координатного базиса на подпространство РИС. В результате сокращается диапазон возможных флуктуаций оценки сигнала и понижается верхняя граница статистической ошибки его измерения. Даны некоторые численные оценки эффективности метода РИС на примере задачи акустической томографии среды, которые подтверждают общие теоретические выводы. Выполнен анализ некоторых информационных технологий, где идеи метода РИС имеют перспективы для практического внедрения. В частности, высказано предположение, что одной из таких перспективных областей могут быть ММО системы, которые играют важную роль в системах беспроводного доступа 5G.

**Ключевые слова:** обратная статистическая задача; сигнальная декомпозиция; матрица Фишера; базис РИС; критерий наблюдаемости сигнала; проекционный оператор; ММО система; 5G

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В современной теории и технике цифровой обработки сигналов DSP (Digital Signal Processing) широко применяются декомпозиции сигналов вида:

$$s(\xi) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \varphi_k(\xi), \quad (1)$$

где  $\{\{\varphi_k(\xi)\}_{k=1}^N\}$  и  $\{\{\gamma_k\}_{k=1}^N\}$  — некоторые базисные функции и соответствующие им коэффициенты разложения,  $N$  — число членов декомпозиции.

DOI: [10.20535/S0021347019110013](https://doi.org/10.20535/S0021347019110013)

© А. Я. Калюжный, 2019

Аргументом сигнальной и базисных функций является координатный вектор  $\xi$ , компонентами которого могут быть (в различных сочетаниях) время, пространственные или угловые координаты, частота и др.

Сигналами в теории DSP обычно называют носители некоторой полезной информации [1], например, передаваемого сообщения (задача связи), речи (телефония), некоторого изображения (реконструкция образов), распределения коэффициента поглощения сигнала в среде (реконструктивная томография) и многое другое. Однако суть обсуждаемых в данной работе методов от физического содержания конкретных задач не зависит.

Полагаем, как принято в теории DSP, что сигнальная функция  $s(\xi)$  задана на дискретном множестве значений своих аргументов  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ . Тогда декомпозицию (1) удобно представить в компактных векторно-матричных обозначениях:

$$\mathbf{s} = \Phi \boldsymbol{\gamma}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{s}$  — сигнальный вектор (матрица-столбец), образованный значениями сигнальной функции  $s(\xi_1), s(\xi_2), \dots, s(\xi_M)$ ,  $\Phi$  — матрица базисных векторов  $M \times N$  (далее — просто базис), элементами которой являются значения базисных функций на координатной сетке:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \varphi_2(\xi_1) & \cdots & \varphi_N(\xi_1) \\ \varphi_1(\xi_2) & \varphi_2(\xi_2) & \cdots & \varphi_N(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\xi_M) & \varphi_2(\xi_M) & \cdots & \varphi_N(\xi_M) \end{bmatrix}.$$

В задачу декомпозиции входит как выбор подходящего базиса  $\Phi$ , так и способа вычисле-

ния коэффициентов разложения  $\boldsymbol{\gamma}$ . В отношении выбора базиса традиционная математическая теория предоставляет чрезвычайно широкие возможности, многие из которых используются в технологиях DSP. Однако традиционная математика ориентирована на описание детерминированных, т.е. полностью известных функций, в то время как сигналы, используемые в системах DSP, как правило, случайны.

Действительно, случайность сигналов происходит хотя бы из того обстоятельства, что случайна (неизвестна заранее) любая полезная информация, которую эти сигналы переносят, иначе нет смысла их принимать. Другим важнейшим фактором случайности являются шумы и помехи\*, которые всегда сопровождают процесс передачи сигналов через некоторую физическую среду. Указанные факторы в традиционной математической теории не учитывались, что потребовало в свое время привлечения методов статистической теории.

Так, еще в начале 20-го века Э.Пирсоном (E. Pierson), а затем в 30–40х годах Г.Хотеллингом (H. Hotelling), Каруненом и Лоэвом (Karhunen–Loève) и многими другими развита теория [2], которую принято называть Анализ Главных Компонент PCA (Principal Components Analysis). Данная теория охватывает довольно широкий класс задач. В частности, одну из наиболее известных ее версий принято называть преобразованием Карунена–Лоэва KLT (Karhunen–Loève Transform).

В основе метода PCA со всеми его модификациями лежит идея использования в качестве базисных, собственных функций некоторого положительно определенного оператора, структура

\* Помехами будем называть некоторые сторонние сигналы, распространяющиеся в той же физической среде и по тем же законам, что и полезный сигнал. Шумами будем называть составляющие наблюдений, которые порождены либо в самой приемной системе (внутренние шумы), либо их возникновение обусловлено воздействием приемной системы на физическую среду.

которого зависит от статистики наблюдений. Условие положительной определенности оператора, порождающего базис, гарантирует полноту базиса, что, в свою очередь, обеспечивает сходимость разложения (2) в некотором вероятностном смысле при возрастании размерности базиса  $N$ .

В частности, оператором, порождающим базис KLT, в конечномерном случае является корреляционная матрица  $M \times M$  сигнального вектора

$$\mathbf{R}_s = \overline{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^T)}, \quad (3)$$

где  $\overline{(\cdot)}$  — символ статистического усреднения по сигнальному пространству\*\*.

Общие свойства корреляционных операторов гарантируют только их неотрицательную определенность [3]. Однако, для многих математических моделей, имеющих теоретическое и практическое значение, часто выполняется и более сильное условие положительной определенности. В таких ситуациях корреляционная матрица (3) порождает на множестве своих собственных векторов функционально полный базис KLT, который удовлетворяет матричному уравнению

$$\mathbf{R}_s \cdot \Phi = \Phi \cdot \Lambda, \quad (4)$$

где  $\Lambda$  — диагональная матрица  $N$ -го порядка ( $N \leq M$ ), составленная из максимальных собственных чисел  $\lambda_1(\mathbf{R}_s) \geq \lambda_2(\mathbf{R}_s) \geq \dots \geq \lambda_N(\mathbf{R}_s)$  матрицы  $\mathbf{R}_s$ .

В свою очередь, собственные числа матрицы (3) находятся из уравнения [2]:

$$\det(\mathbf{R}_s - \lambda_k \cdot \mathbf{I}_M), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (5)$$

где  $\mathbf{I}_M$  — единичная матрица порядка  $M$ .

Полученный таким образом базис обладает тем свойством, что при заданной размерности

$N$  среднеквадратическая погрешность представления случайного сигнала  $\mathbf{s}$  является минимально возможной среди любых других ортонормированных базисов [2], т. е.

$$\overline{|\mathbf{s} - \Phi \gamma|^2} \xrightarrow{\Phi} \min \quad (6)$$

при условии

$$\Phi^T \cdot \Phi = \mathbf{I}_N. \quad (7)$$

Таким образом, при указанных предположениях базис KLT является оптимальным для представления случайных сигналов по критерию (6) при ограничении (7).

Однако рассмотренная методология построения базиса KLT не учитывает некоторых важных обстоятельств, возникающих в задачах приема сигналов. Прежде всего заметим, что сигнал  $\mathbf{s}$ , несущий полезную информацию, в «чистом» виде обычно не существует, а наблюдается в смеси с шумами и помехами. Кроме того, сигнал в физической среде может подвергаться искажениям, вид и параметры которых часто заранее неизвестны.

С учетом данных обстоятельств в общем случае модель наблюдений сигнала на входе системы DSP может быть представлена некоторой операторной зависимостью

$$\mathbf{u} = \mathcal{H}\{\mathbf{s}, \mathbf{n}\}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор случайных факторов задачи (шумы, помехи, вид искажений в среде и т. д.). При этом размерности сигнального вектора  $\mathbf{s}$  и вектора наблюдений  $\mathbf{u}$  в общем случае могут не совпадать.

Далее будем рассматривать статистическую обратную задачу [4, 5] оценивания (восстановле-

\*\* Здесь и далее полагается, что математическое ожидание сигнала равно нулю.

ния) полезного сигнала  $\mathbf{s}$  по наблюдениям (8). В зависимости от свойств оператора  $\mathcal{H}\{\cdot\}$  и статистической модели наблюдений, задачи такого типа часто относят к классу некорректно поставленных [4, 5], что означает неустойчивость оценки сигнала  $\hat{\mathbf{s}}$  к самым незначительным отклонениям исходных данных от принятой модели. Поэтому при решении такого рода задач обычно применяются специальные меры регуляризации, которые повышают устойчивость оценки  $\hat{\mathbf{s}}$  к воздействию дестабилизирующих факторов.

Одним из эффективных методов регуляризации обратных задач может быть их алгебраизация [5]. Суть метода состоит в том, что оценка сигнала ищется в виде:

$$\hat{\mathbf{s}} = \Phi \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (9)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  — оценка коэффициентов декомпозиции сигнала (2) по наблюдениям (8).

Как показано ниже, оптимизация базиса в сочетании с надлежащим отбором базисных векторов, может обеспечить эффективную регуляризацию обратной статистической задачи и снижение общей погрешности измерений.

Данный метод регуляризации обратных задач впервые рассмотрен в [6]. При этом фактически предложена принципиально иная, по сравнению с классическим методом PCA, трактовка самого понятия главных компонент, а именно, главными согласно [6] следует считать те компоненты, которые при заданных условиях измерений могут быть восстановлены с минимальной погрешностью. В свою очередь, минимально возможная статистическая погрешность оценивания сигнала определяется информационной матрицей (оператором) Фишера соответствующей задачи [3].

Именно поэтому в [6] предложено формировать оптимальный в указанной трактовке базис из собственных векторов матрицы Фишера. Однако принцип отбора главных компонент при этом оставался тем же, что и в традиционной технологии PCA, т.е. по величине собственных чисел, но не корреляционной матрицы сигнала, а матрицы Фишера. Этот метод в [5, 6] назван *оккамовским оцениванием*, что, по мнению их автора, символизирует минимизацию числа необходимых для решения задачи компонент, т.е. соответствует известному философскому принципу («бритве») Оккама.

Несколько позднее сходный метод рассматривался в [7], где также предложено формировать базис из собственных векторов матрицы Фишера, но при этом использовать иной принцип отбора компонент. Этот принцип учитывает не только статистическую, но и систематическую погрешности измерений. Чтобы отличать такой подход к отбору от традиционного PCA, в [7] предложено называть соответствующие компоненты главными информативными компонентами PIC (Principal Informative Components).

Дальнейшее развитие идей метода PIC дано в [8–12], где этот метод распространен на задачи реконструкции как детерминированных, так и случайных сигналов, предложена проекционная техника улучшения произвольного базиса, рассмотрено использование метода PIC в задачах информационного сжатия сигналов и др. Кроме того, показана связь метода PIC с методами KLT и с методом сингулярной декомпозиции SVD (Singular Value Decomposition).

После публикаций<sup>\*\*\*</sup> [7–12] прошло значительное время, за которое, во-первых, технологии DSP ушли далеко вперед, во-вторых, не «стояло на месте» понимание тех идей, которые рассматривались в указанных источниках. К тому же, большинство этих работ опубликованы

\*\*\* Указанные публикации доступны для просмотра по ссылке [19].

в не самых доступных изданиях и были довольно разрозненными как по тематической направленности, так и стилю изложения. Все эти обстоятельства и стали побудительными мотивами для написания настоящего систематизированного обзора, который задуман как системное и целостное изложение теоретических основ метода РС, а также, анализу возможных областей его применения с учетом тенденций развития современных информационных технологий.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассмотрена трактовка задачи декомпозиции сигнала с позиций теории статистического оценивания на примере линейной модели наблюдений, что позволяет в явном виде проследить ряд важных закономерностей. В частности, выявлена фундаментальная роль информационного оператора Фишера и показаны оптимальные свойства базиса РС. Затем в разделе 3 эти закономерности распространены на общий случай произвольной связи между наблюдениями и сигналом. В разделе 4 рассмотрена проекционная методика уменьшения статистических погрешностей восстановления сигнала при использовании произвольных неоптимальных базисов. Наконец, в разделе 5 проведен анализ возможных областей дальнейшего применения метода РС, которые могут послужить основой для продолжения серии публикаций по данной тематике. Кроме того, приведены численные иллюстрации, иллюстрирующие эффективность метода РС на примере задачи реконструктивной акустической томографии океана.

## 2. ОПТИМИЗАЦИЯ СИГНАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ НАБЛЮДЕНИЙ

Предположим, что подлежащий оцениванию вектор сигнала  $\mathbf{s}$  размерностью  $M \times 1$  связан с вектором наблюдений  $\mathbf{u}$  размерности  $P \times 1$  линейным соотношением:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{H}$  — матрица  $P \times M$  преобразования сигнала в некоторой среде передачи,  $\mathbf{n}$  — вектор шумов и помех.

Несмотря на свою простоту, модель (10) используется для решения многих важных в теоретическом и практическом отношении задач DSP, в частности, для описания ММО систем [13, 14]. В то же время, в рамках этой модели возможно в явном виде проиллюстрировать применение методологии оптимизации базиса  $\Phi$ .

Более общий случай нелинейного оценивания будет рассмотрен в следующем разделе. При этом ограничимся рассмотрением оценок максимального правдоподобия ML (Maximum Likelihood), которые обычно наиболее подвержены различным факторам неустойчивости [4, 5].

Конкретизируем статистику вектора наблюдений (10), для чего предположим, что распределение вектора помех  $\mathbf{n}$  гауссовское с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей  $\mathbf{R}_n$ . Если матрица преобразования сигнала в среде передачи  $\mathbf{H}$  известна, то логарифм функции правдоподобия наблюдений (10) для задачи оценивания сигнального вектора  $\mathbf{s}$  имеет вид [15]:

$$\ln p(\mathbf{u} / \mathbf{s}) = \alpha - \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{s})^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{H}\mathbf{s}), \quad (11)$$

где  $\alpha$  — величина, не зависящая от гипотезы относительно вектора  $\mathbf{s}$ .

Оценка максимального правдоподобия сигнала находится как точка максимума функции (11) по  $\mathbf{s}$ , что приводит к следующему результату для «прямой» оценки (Direct Estimate) сигнала по методу ML:

$$\hat{\mathbf{s}}_{DE} = \mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{u}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{H} \quad (13)$$

— матричная форма, которая совпадает с условной информационной матрицей Фишера задачи

оценивания сигнала методом ML по наблюдениям (10).

Действительно, указанная матрица вычисляется по формуле [15]:

$$(\mathbf{J}_s)_{ik} = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_k} \ln p(\mathbf{u} / \mathbf{s}) / \mathbf{s} \right\rangle, \quad i, k = 1, \dots, M, \quad (14)$$

где  $\langle \cdot / \mathbf{s} \rangle$  — символ условного математического ожидания по ансамблю шумов и помех для фиксированной гипотезы относительно сигнала  $\mathbf{s}$ .

После подстановки в (14) выражения (11) и выполнения соответствующих вычислений приходим к выражению (13).

Легко видеть, что оценка (12) является условно несмещенной, т. е. ее условное математическое ожидание по ансамблю наблюдений совпадает с оцениваемым сигналом:

$$\langle \hat{\mathbf{s}}_{DE} / \mathbf{s} \rangle = \mathbf{s}.$$

С учетом данного обстоятельства для условной дисперсии оценки (12) несложно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \left\langle |\hat{\mathbf{s}}_{DE} - \langle \hat{\mathbf{s}}_{DE} \rangle|^2 / \mathbf{s} \right\rangle = \left\langle |\hat{\mathbf{s}}_{DE} - \mathbf{s}|^2 / \mathbf{s} \right\rangle = \\ &= \left\langle \left| \mathbf{J}_s^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{s} \right|^2 / \mathbf{s} \right\rangle = \text{tr} \{ \mathbf{J}_s^{-1} \}, \end{aligned}$$

где  $\text{tr} \{ \cdot \}$  — символ операции вычисления следа матрицы.

Учитывая, что след матрицы равен сумме ее собственных значений, средний квадрат общей погрешности «прямой» ML оценки сигнала имеет вид:

$$d_{DE}^2 = \sigma_s^2 = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k}, \quad (15)$$

где  $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{J}_s)$ ,  $k = 1, \dots, M$  — собственные числа матрицы Фишера, т. е. решения уравнения, аналогичного (5), но с матричным ядром (13).

Отметим, что свойства матрицы Фишера (13) для модели наблюдений (10) определяются как свойствами помехи, так и структурой матрицы преобразования сигнала  $\mathbf{H}$ .

Далее для решения этой же задачи воспользуемся «базисным» подходом. Подстановка декомпозиции (2) в уравнение наблюдений (10) дает:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\Phi\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{n}.$$

По аналогии с (11) запишем логарифм функционала правдоподобия для задачи оценивания коэффициентов декомпозиции  $\boldsymbol{\gamma}$ :

$$\ln p(\mathbf{u} / \boldsymbol{\gamma}) = \alpha - \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{H}\Phi\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{R}_n^{-1} (\mathbf{u} - \mathbf{H}\Phi\boldsymbol{\gamma}). \quad (16)$$

Варьируя функционал (16) по вектору  $\boldsymbol{\gamma}$  и приравнявая вариацию нулю, находим оценку ML для коэффициентов декомпозиции сигнала:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\Phi^T \mathbf{J}_s \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{u}. \quad (17)$$

Используя это выражение, можно записать оценку сигнала в базисном представлении:

$$\hat{\mathbf{s}}_\Phi = \Phi \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \Phi (\Phi^T \mathbf{J}_s \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{H}^T \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{u}. \quad (18)$$

Сравним «прямую» оценку (12) и «базисную» оценку (18). Заметим, что оценка (18) в отличие от (12) имеет смещение, т. е. систематическую ошибку, квадрат которой равен:

$$\begin{aligned} \Delta_s^2(\Phi) &= |\mathbf{s} - \langle \hat{\mathbf{s}}_\Phi / \mathbf{s} \rangle|^2 = \\ &= \left| \left( \mathbf{I}_M - \Phi (\Phi^T \mathbf{J}_s \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{J}_s \right) \cdot \mathbf{s} \right|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Причиной возникновения смещения является усечение размерности базиса до  $N < M$  т. к. при  $N = M$  базисная матрица обратима, и смещение (19) обращается в нуль. Но само по себе смещение оценки отнюдь не является показателем ее качества. Более того, как будет показано ниже, именно смещение оценки (18) вследствие усечения базиса является тем фактором, который ста-

билизирует ее устойчивость и снижает в конечном итоге результирующую погрешность измерений по сравнению с «прямой» оценкой (12).

Более существенным обстоятельством является само существование оценок. Для «прямой» оценки сигнала (12) необходимым условием ее существования является обратимость матрицы Фишера  $\mathbf{J}_s$ , т.е. эта матрица должна быть неособенной. В то же время, для многих реконструктивных задач имеет место частичная деградация наблюдений, что приводит к понижению эффективного ранга матрицы (13) по сравнению с ее порядком  $M$ . В этих условиях прямое оценивание сигнала может приводить к неприемлемым флуктуациям оценки  $\hat{s}_{DE}$ .

В случае же «базисной» оценки (18), необходимым условием существования оценки является обратимость матричной формы

$$\mathbf{J}_\gamma = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{J}_s \mathbf{\Phi}, \quad (20)$$

которая является матрицей Фишера порядка  $N$  для задачи оценивания коэффициентов декомпозиции (2).

Базис  $\mathbf{\Phi}$ , как сказано выше, обычно является неполным, т.е. усеченным. Поэтому надлежащим выбором размерности базиса и самих базисных векторов обратимость матричной формы (20) всегда может быть обеспечена \*\*\*\* [16]. Таким образом, уже на уровне самого общего анализа видны преимущества метода сигнальной декомпозиции перед прямым оцениванием сигнала, а именно, обеспечение устойчивости оценки (18) по сравнению с прямой оценкой (12).

Рассмотрим условную дисперсию оценки (18):

$$\sigma_s^2(\mathbf{\Phi}) = \langle |\hat{s}_\Phi - \langle \hat{s}_\Phi \rangle|^2 / s \rangle.$$

Непосредственно из структуры оценки (18) находим следующее выражение для ее условной дисперсии:

$$\sigma_s^2(\mathbf{\Phi}) = \text{tr}\{\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} (\mathbf{\Phi}^T \mathbf{J}_s \mathbf{\Phi})^{-1}\}. \quad (21)$$

Проварьируем выражение (21) по базисной матрице  $\mathbf{\Phi}$ :

$$\frac{\partial \sigma_s^2}{\partial \mathbf{\Phi}} = 2\mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{J}_s \mathbf{\Phi})^{-1} - \\ - 2\mathbf{J}_s \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{J}_s \mathbf{\Phi})^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{J}_s \mathbf{\Phi})^{-1}.$$

Прямой подстановкой нетрудно проверить, что данное выражение обращается в нуль для базиса  $\mathbf{\Phi}$ , который является решением уравнения:

$$\mathbf{J}_s \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Lambda}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{\Lambda}$  — диагональная матрица, составленная из  $N$  собственных чисел матрицы Фишера  $\mathbf{J}_s$ .

Отметим, что поскольку матрица Фишера симметрична, то собственные вектора задачи (22) ортонормированны, т.е. базис  $\mathbf{\Phi}$  удовлетворяет условию (7). Множество решений задачи (22), удовлетворяющих сформулированным ниже критериям отбора, названо в [7, 8] базисом РС.

Первый из критериев отбора (далее для краткости — Критерий 1) состоит в том, что в базис РС следует включать те собственные вектора матрицы Фишера, которые соответствуют ее максимальным собственным числам, т.е.

$$\lambda_1(\mathbf{J}_s) \geq \lambda_2(\mathbf{J}_s) \geq \dots \geq \lambda_N(\mathbf{J}_s).$$

Именно этот способ отбора соответствует предложенному в [5, 6] методу, который назван оккамовским оцениванием. Нетрудно видеть, что при таком способе формирования базиса

\*\*\*\* Например, для этого достаточно, чтобы базисные вектора были ортогональны нуль-пространству матрицы  $\mathbf{J}_s$ .

РІС статистическая погрешность измерений (21) достигает минимально возможного при данной размерности базиса  $N$  значения:

$$(\sigma_s^2)_{\min} = \text{tr}\{\Lambda^{-1}\} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}, \quad (23)$$

где  $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{J}_s)$  — собственные числа матрицы (13), пронумерованные в невозрастающем порядке. Однако, как при этом выбирать саму размерность  $N$  в [5, 6] не сказано.

Другой критерий отбора РІС (кратко, Критерий 2) предложен в [7]. Этот критерий может быть получен, если, оставаясь в рамках допустимых решений задачи (22), потребовать минимума суммарной погрешности оценивания, включающей как систематическую, так и статистическую компоненты:

$$d_s^2 = \langle |\hat{s} - s|^2 / s \rangle = \Delta_s^2 + \sigma_s^2. \quad (24)$$

Если базис  $\Phi$  является решением уравнения (22), то общая погрешность (24) может быть представлена в виде:

$$d_{\text{PIC}}^2 = |s|^2 - \sum_{k=1}^N \left( \gamma_k^2 - \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad (25)$$

где  $\{\gamma_k\}_{k=1}^N$  — коэффициенты декомпозиции, которые с учетом ортонормированности рассматриваемого базиса вычисляются как:

$$\boldsymbol{\gamma} = \Phi^T \mathbf{s}. \quad (26)$$

Из рассмотрения (25) видно, что наиболее информативные компоненты не обязательно соответствуют максимальным собственным числам матрицы  $\mathbf{J}_s$ . В самом деле, согласно (25) включение в базис  $\Phi$  некоторой  $k$ -ой компоненты уменьшает систематическую часть погрешности оценивания на  $\gamma_k^2$ , но увеличивает ее статистическую составляющую на  $1/\lambda_k$ . Следовательно, если исходить не только из статистической, но и систематической составляющей результирующей погрешности оценивания сигнала  $\mathbf{s}$ , то в оптималь-

ный базис следует включать только те компоненты, для которых выполняется условие:

$$\gamma_k^2 - \frac{1}{\lambda_k} \geq 0, \quad (27)$$

т.к. только такие компоненты уменьшают (или, по крайней мере, не увеличивают) результирующую погрешность оценивания (25) и, следовательно, могут быть реально измерены.

Те компоненты, которые не удовлетворяют условию (27), полезной информации при заданной процедуре измерений фактически не несут и могут быть отброшены.

Общее количество компонент  $N_0$ , для которых выполняется условие информативности (27), определяет оптимальную по Критерию 2 размерность базиса  $\Phi$ . Отступление от этой оптимальной размерности в сторону увеличения будет приводить к росту результирующей погрешности за счет статистической составляющей, а уменьшение размерности базиса также увеличивает результирующую погрешность, но уже за счет систематической ошибки. Следовательно, при любом другом по сравнению с критерием (27) принципе отбора базисных векторов, суммарная погрешность измерений будет выше.

Нетрудно показать, что формирование базиса по Критерию 2 обеспечивает меньшую суммарную ошибку измерений по сравнению с прямым оцениванием сигнала. Для этого образуем разность выражений (15) и (25):

$$d_{\text{DE}}^2 - d_{\text{PIC}}^2 = \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^N \gamma_k^2 - |s|^2.$$

Рассматриваемый базис РІС, как отмечалось выше, ортонормирован. Поэтому для него справедливо равенство Парсеваля [1]:

$$|s|^2 = \sum_{k=1}^M \gamma_k^2,$$

с учетом которого разность погрешностей принимает вид:



$$\sigma_{\text{DE}}^2 - d_{\text{PIC}}^2 = \sum_{k=N+1}^M \left( \frac{1}{\lambda_k} - \gamma_k^2 \right). \quad (28)$$

Если в базис включены все компоненты, удовлетворяющие условию (27), то разность (28) неотрицательна. Следовательно

$$\sigma_{\text{DE}}^2 \geq d_{\text{PIC}}^2,$$

причем, знак равенства возможен только при  $N = M$ , т.е. когда обе оценки тождественны.

При  $N < M$  данное неравенство будет строгим, а реально часто и усиленным, т.к. матрица Фишера в обратных статистических задачах часто бывает плохо обусловленной. Это означает, что некоторые из ее собственных чисел близки к нулю. В результате погрешность (15) для «прямой» оценки сигнала может быть теоретически неограниченной, а практически — неприемлемо большой. В то же время, метод PIC всегда дает регулярное решение с ограниченной дисперсией, т.к. процедура отбора PIC по Критерию 1 и по Критерию 2 подобные ситуации исключает.

Таким образом, хотя ограничение числа членов декомпозиции (1) и приводит к смещению оценки восстанавливаемого сигнала, тем не менее, рассмотренная процедура формирования оптимального базиса обеспечивает суммарную погрешность оценивания меньше, чем для несмещенных методов «прямого» восстановления сигнала, в частности, оценки (12).

На первый взгляд может показаться, что данный вывод противоречит одному из фундаментальных результатов статистической теории оценивания [3], в соответствии с которым несмещенные оценки ML являются одновременно и эффективными, т.е. имеющими минимально возможную дисперсию. Но данное утверждение относится только к сопоставлению между собой несмещенных оценок и никоим образом «не запрещает» смещенным оценкам демонстрировать лучшие результаты, чем несмещенные по критерию общей погрешности измерений.

Не следует также забывать о сопровождающей обычно указанное утверждение оговорке: «если ML оценка существует». При решении обратных статистических задач существование ML оценок не гарантировано: скорее типична обратная ситуация, когда практическое применение таких оценок невозможно или нецелесообразно. Таким образом, возможность улучшения свойств «прямых» ML оценок на основе рассматриваемой методологии, фундаментальным результатам статистической теории не противоречит.

Следует пояснить еще одно обстоятельство, которое может служить источником недопонимания. Согласно рассмотренному критерию отбора базисных векторов (27), для его применения необходимо располагать значениями коэффициентов декомпозиции сигнала (26). Но откуда их взять, если по самой постановке задачи оценивания сигнал предполагается априори неизвестным? Ответ на этот вопрос зависит от содержания конкретной практической задачи.

В частности, в современных системах телекоммуникаций применяются различные технологии [14], в частности, MIMO, которые, как правило, предусматривают режим предварительной настройки этих систем под априори неизвестные характеристики каналов. Эта задача решается за счет введения специальных режимов обучения системы по так называемым пилот-сигналам, т.е. вспомогательным сигналам, вид и параметры которых установлены в соответствующих телекоммуникационных протоколах. Таким образом, нет никаких принципиальных трудностей в использовании аналогичного режима предварительного обучения и для задачи формирования базиса PIC. В других задачах возможно применение иных специфических мер, которые определяются их конкретным прикладным содержанием. Один из таких примеров приведен в разделе 5.

В случае невозможности предварительного прогноза коэффициентов (26), универсальным решением может быть использование Критерия 1 для отбора главных компонент, т.е. величины соб-

ственных чисел матрицы Фишера, хотя это может снизить потенциальную эффективность метода.

В заключение данного раздела отметим, что частными случаями рассмотренного базиса РИС для линейной модели наблюдений являются некоторые версии базисов KLT и SVD.

В самом деле, пусть в уравнении наблюдения (10) матрица преобразования сигнала является единичной, т. е.  $\mathbf{H} = \mathbf{I}_M$ . Тогда матрица Фишера (13) совпадает с обратной корреляционной матрицей шума, т. е.  $\mathbf{J}_s = \mathbf{R}_n^{-1}$ . В результате уравнение (22) для базиса РИС принимает вид:

$$\mathbf{R}_n \Phi = \Phi \Lambda^{-1}, \quad (29)$$

что соответствует базису KLT для вектора шумов и помех  $\mathbf{n}$ .

Теперь пусть уравнение наблюдения сохраняет структуру (10), но шумы при этом некоррелированы, т. е.:

$$\mathbf{R}_n = g_n \mathbf{I}_P. \quad (30)$$

Тогда матрица Фишера (13) равна  $\mathbf{J}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{H} / g_n$ , а уравнение (22) для базиса РИС принимает вид:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \Phi = g_n \Phi \Lambda,$$

что с точностью до несущественного множителя совпадает с уравнением для правого сингулярного базиса [16] матрицы  $\mathbf{H}$ .

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗИСА ДЛЯ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассмотрим модель наблюдений общего вида (8). Без конкретизации вида оператора структуру «базисной» оценки в явном виде записать нельзя. Но даже если вид оператора известен, то эта задача часто наталкивается на значительные математические трудности. Соответственно, не всегда удается записать общее выражение для погрешностей оценивания сигнала. Однако в общем случае можно оптимизи-

ровать базис по критерию минимума нижней границы погрешности оценки [9].

Указанную границу устанавливает один из фундаментальных результатов статистической теории оценивания — неравенство Рао–Крамера [15]. Наиболее известная версия этого неравенства, которая соответствует условно несмещенным оценкам, имеет вид:

$$\sigma_s^2 = \langle |\hat{s} - \mathbf{s}|^2 / \mathbf{s} \rangle \geq \text{tr} \{ \mathbf{J}_s^{-1} \} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k}, \quad (31)$$

где  $\mathbf{J}_s$  — условная информационная матрица Фишера задачи статистического оценивания,  $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{J}_s)$  — соответствующие ей собственные числа.

Таким образом, дисперсия любой условно несмещенной оценки не может быть меньше правой части неравенства (31). Именно такое значение дисперсии (выражение (15)) получено в предыдущем разделе для «прямой» оценки сигнального вектора  $\mathbf{s}$ , т. е. эта оценка, если она существует, является эффективной.

Однако, как показано выше, данный результат возможно улучшить за счет применения базиса РИС в ситуации, когда матрица  $\mathbf{J}_s$  является плохо обусловленной. Улучшение достигается за счет усечения размерности базиса, которое хотя и приводит к появлению смещения (систематической ошибки) оценки, но общая погрешность при этом оказывается ниже значения (31).

В данном разделе показано, что подобный результат может быть достигнут для произвольной модели наблюдения, но только по отношению к минимально достижимой границе погрешности. Все принятые выше предположения остаются прежними.

В качестве исходного соотношения для решения поставленной задачи воспользуемся более общей по сравнению с (31) версией неравенства Рао–Крамера, которая справедлива для смещенных оценок [15]:

$$d_s^2 = \langle |\hat{s} - \mathbf{s}|^2 / \mathbf{s} \rangle \geq |\mathbf{b}_s|^2 + \text{tr}\{(\mathbf{I} + \mathbf{B}_s) \cdot \mathbf{J}_s^{-1} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{B}_s)^T\}, \quad (32)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, размерность которой соответствует размерности  $M$  сигнального вектора,

$$\mathbf{b}_s = \langle \hat{\mathbf{s}} / \mathbf{s} \rangle - \mathbf{s} \quad (33)$$

— вектор условного смещения оценки,

$$\mathbf{B}_s = \partial \mathbf{b}_s / \partial \mathbf{s} \quad (34)$$

— матрица  $M \times M$  производных компонент вектора смещения по компонентам сигнального вектора.

Структура оценки сигнала в соответствии с «базисным» подходом определяется соотношением (9), с учетом которого для вектора смещения (33) можно записать:

$$\mathbf{b}_s = \Phi \mathbf{m}_\gamma - \mathbf{s},$$

где  $\mathbf{m}_\gamma = \langle \hat{\mathbf{y}} / \mathbf{s} \rangle$  — условное среднее оценки вектора коэффициентов сигнальной декомпозиции (9).

Зависимость параметра  $\mathbf{m}_\gamma$  от сигнального вектора и других условий конкретной задачи в общем случае может быть достаточно сложной. Однако эту зависимость можно не задавать, если воспользоваться усиленной версией неравенства (32). Идея состоит в том, чтобы вместо неизвестного в общем случае вектора смещения (33) использовать его нижнюю границу, которая находится из условия:

$$|\mathbf{b}_s|^2 = |\Phi \mathbf{m}_\gamma - \mathbf{s}|^2 \xrightarrow{\mathbf{m}_\gamma} \min.$$

В свою очередь, минимум данного выражения достигается для значения параметра:

$$\mathbf{m}_\gamma = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{s}.$$

С учетом этого результата для нижней границы квадрата модуля вектора смещения получаем:

$$|\mathbf{b}_s|^2 \geq |(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\Phi) \mathbf{s}|^2, \quad (35)$$

где

$$\mathbf{P}_\Phi = \Phi(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \quad (36)$$

— оператор ортогонального проектирования на подпространство, порождаемое базисом  $\Phi$ .

В свою очередь, соответствующая границе (35) матрица производных (34) имеет вид:

$$\mathbf{B}_s = \partial \mathbf{b}_s / \partial \mathbf{s} = \mathbf{P}_\Phi - \mathbf{I}. \quad (37)$$

После подстановки соотношений (35), (37) в (32) и выполнения преобразований, учитывающих общие свойства проекционного оператора (36), находим усиленную версию неравенства (32) для смещенных оценок:

$$d_s^2 \geq \mathbf{s}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\Phi) \mathbf{s} + \text{tr}\{\mathbf{P}_\Phi \cdot \mathbf{J}_s^{-1}\}. \quad (38)$$

Данное соотношение имеет наглядный вид. Действительно, первое слагаемое правой части (38) соответствует систематической компоненте погрешности, а второе — ее статистической компоненте. В свою очередь, соотношение между систематической и статистической компонентами погрешностей определяется размерностью базиса.

При полноразмерном базисе, т.е.  $N = M$ , матрица  $\Phi$  обратима. В этом случае проектор (36) совпадает с единичной матрицей, т.е.  $\mathbf{P}_\Phi = \mathbf{I}$ , и соотношение (38) переходит в неравенство (31) для несмещенных оценок. При усечении базиса проектор  $\mathbf{P}_\Phi$  действует как фильтр, который выделяет определенные компоненты сигнала, что приводит к появлению систематической ошибки. Однако, одновременно проектор «фильтрует» и компоненты матрицы Фишера, что снижает статистическую компоненту погрешности. Вследствие взаимного действия двух этих факторов общая достижимая погрешность измерений может быть ниже, чем это определяется неравенством (31).

Таким образом, возникает оптимизационная задача о перераспределении погрешностей между двумя слагаемыми правой части соотношения (38) по критерию минимизации нижней границы суммарной погрешности оценивания.

Решение аналогичной оптимизационной задачи представлено в предыдущем разделе для линейной модели наблюдений (10). Это решение состояло в том, чтобы, во-первых, формировать базис из собственных векторов уравнения (22), во-вторых, применить принцип отбора компонент согласно условию (27).

Покажем, что указанное решение пригодно также для общего случая. Действительно, если воспользоваться базисом, который является решением уравнения (22), то с учетом его общих свойств неравенство (38) несложно привести к виду:

$$d_s^2 \geq |\mathbf{s}|^2 - \sum_{k=1}^N \left( \gamma_k^2 - \frac{1}{\lambda_k} \right), \quad (39)$$

что полностью соответствует правой части соотношения (25), полученного ранее для линейной модели наблюдений (10). Следовательно, все, что говорилось в предыдущем разделе относительно критериев отбора РС, справедливо и в общем случае, только применительно к нижней границе погрешностей оценивания.

Реальная погрешность может быть значительно выше этой границы, что определяется условиями конкретной задачи. Тем не менее, границы Рао–Крамера являются общепринятым теоретическим ориентиром, который широко используется на этапе планирования статистических экспериментов. Данное обстоятельство может служить основанием для применения базиса РС и в случае произвольной модели измерений. Специфика конкретной задачи будет при этом отражена в структуре соответствующей матрицы Фишера.

В заключение данного раздела отметим, что метод РС может дать количественную основу для такого основополагающего в теории сигналов и систем понятия, как наблюдаемость [17, 18]. Это понятие впервые введено в классической работе Калмана [17], где критерием полной наблюдаемости предложено считать невырожденность некоторых матричных форм.

Анализ показывает, что эти матричные формы соответствуют операторам Фишера для рассмотренных в [17] задач, но вычисленные без учета помех. Кроме того, классический критерий наблюдаемости не дает трактовки понятия частичной наблюдаемости, а тем более, его количественной меры.

В [7] предложено принять в качестве количественной меры частичной наблюдаемости отношение количества компонент  $N_0$ , удовлетворяющих условию информативности (27), к общей размерности  $M$  сигнального пространства. В самом деле, когда условие (27) выполняется для всех компонент измеряемого сигнала, то погрешность его восстановления может быть сколь угодно малой при соответствующем увеличении объема наблюдений. Если же критерию (27) удовлетворяют только  $N_0 < M$  компонент, то существуют принципиальные ограничения на точность оценивания.

Достоинством такого критерия наблюдаемости является его обобщающий характер, т.к. параметр  $N_0$  зависит от всей совокупности факторов решения задачи восстановления сигнала: помеховой ситуации, метода оценивания, свойств операторов и т.д. Отметим, что теоретическая и практическая полезность такого критерия еще нуждается в обосновании.

#### 4. РС-ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО БАЗИСА

Непосредственное практическое использование базиса РС не всегда удобно, т.к. в некоторых задачах размерность сигнального пространства может быть велика (сотни и тысячи). Другой недостаток этого базиса — отсутствие непосредственной связи с физическим содержанием решаемой задачи.

В то же время, используемые в настоящее время в сигнальной обработке базисы (FFT, DCT, wavelet, filterbanks и др.) более компактны и более «физичны», но построены без учета статистического характера задачи восстановления сигнала по зашумленным данным. В [11] пред-

ложена методика, которая объединяет преимущества традиционного физического описания с преимуществами метода РС.

Предположим, что сигнал представлен в виде декомпозиции, аналогичной (2), но в некотором ином базисе  $\Psi$  размерностью  $M \times Q$ :

$$\mathbf{s} = \Psi \boldsymbol{\beta}, \quad (40)$$

где  $\boldsymbol{\beta}$  — вектор  $Q \times 1$  коэффициентов разложения.

Часто базис  $\Psi$  выбирают из физических соображений, что обеспечивает достаточно компактное описание сигнала при отсутствии помех. Таким образом, уже при относительно небольшой размерности базиса  $Q$  систематической ошибкой представления (40) обычно можно пренебречь.

Применим к правой части (40) разложение по некоторому иному базису  $\Phi$  размерностью  $M \times N$ , где  $N \geq Q$ . При этом вектор коэффициентов  $\boldsymbol{\gamma}$  этого дополнительного разложения выберем по критерию:

$$|\Psi \boldsymbol{\beta} - \Phi \boldsymbol{\gamma}|^2 \xrightarrow{\boldsymbol{\gamma}} \min.$$

В результате получим:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Psi \boldsymbol{\beta}.$$

Структура данного выражения позволяет предположить, что оценку сигнала можно искать в виде

$$\hat{\mathbf{s}} = \Psi_{\Phi} \hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad (41)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  — оценка вектора коэффициентов исходного разложения (40), а

$$\Psi_{\Phi} = \Pi_{\Phi} \Psi, \quad (42)$$

— некоторый новый базис размерностью  $Q$ , который образован в результате проектирования базиса  $\Psi$  на подпространство, порожаемое базисом  $\Phi$ ,  $\Pi_{\Phi}$  — проекционный оператор (36).

Соотношение (41) может быть использовано для произвольных базисов  $\Psi$  и  $\Phi$ .

Теперь предположим, что базис  $\Phi$  является базисом РС, т.е. составлен из решений задачи (22). Кроме того, полагаем, что РС отобраны по Критерию 1, т.е. в порядке убывания собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ . Нетрудно показать, что в этом случае оценка (41) обеспечивает меньшую статистическую погрешность восстановления сигнала, чем оценка, полученная при непосредственном использовании исходного базиса  $\Psi$ , т.е. оценки вида:

$$\hat{\mathbf{s}} = \Psi \hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (43)$$

Действительно, для линейной модели наблюдений (10) статистическая погрешность оценки (43) определяется выражением, аналогичным (21), но записанным для координатной матрицы  $\Psi$ :

$$\sigma_s^2(\Psi) = \text{tr}\{\Psi^T \Psi (\Psi^T \mathbf{J}_s \Psi)^{-1}\}. \quad (44)$$

На основании теоремы Куранта–Фишера [16] в [11] получено следующее неравенство для статистической погрешности оценки сигнала (44):

$$\sum_{k=1}^Q \frac{1}{\lambda_k} \leq \sigma_s^2(\Psi) \leq \sum_{k=M-Q+1}^M \frac{1}{\lambda_k}, \quad (45)$$

где  $\lambda_k = \lambda_k(\mathbf{J}_s)$  — собственные числа матрицы Фишера, пронумерованные в порядке не возрастания.

Для статистической погрешности оценки сигнала (41), использующей проекционный базис (42), по аналогии с (44) запишем выражение:

$$\sigma_s^2(\Psi_{\Phi}) = \text{tr}\{\Psi^T \Pi_{\Phi} \Psi (\Psi^T \Pi_{\Phi} \mathbf{J}_s \Pi_{\Phi} \Psi)^{-1}\},$$

которое с учетом структуры проекционного оператора (36) и ортонормированности базиса РС преобразуется к виду:

$$\sigma_s^2(\Psi_{\Phi}) = \text{tr}\{\Theta^T \Theta (\Theta^T \Lambda \Theta)^{-1}\}, \quad (46)$$

где  $\Theta = \Phi^T \Psi$ ,  $\Lambda$  — диагональная матрица старших собственных чисел информационной матрицы  $\mathbf{J}_s$ .

Нетрудно видеть, что выражение (46) аналогично по структуре выражению (44), что, по аналогии с (45), позволяет оценить погрешность (46) неравенством:

$$\sum_{k=1}^Q \frac{1}{\lambda_k} \leq \sigma_s^2(\Psi_{\Phi}) \leq \sum_{k=N-Q+1}^N \frac{1}{\lambda_k}. \quad (47)$$

Из сопоставления соотношений (45) и (47) нетрудно видеть, что при  $N < M$  диапазон возможных значений статистической погрешности (46) уже, а верхняя граница этого диапазона ниже, чем для погрешности (44). Следовательно, оценки сигнала вида (41), полученные с использованием проекционного базиса (42), менее подвержены статистическим ошибкам, чем оценки (43), использующие непосредственно физический базис.

Исходя из структуры выражения (42) можно сказать, что проектор  $\Pi_{\Phi}$  воздействует на базис  $\Psi$  как фильтр, редуцирующий те его компоненты, которые фактически не могут быть восстановлены из-за больших статистических ошибок измерений. Тем самым в изначально физическом описании можно учесть статистический характер процедуры измерений.

Рассмотренный проекционный подход имеет преимущества и по сравнению с базисом РС в «чистом» виде. Во-первых, размерность проекционного базиса  $\Psi_{\Phi}$  такая же, как и у исходного базиса  $\Psi$ , во-вторых, данное описание более физично.

Однако, проекционное преобразование базиса влияет не только на статистическую, но и на систематическую погрешности. К сожалению, каких-либо общих выводов относительно этой стороны проблемы пока сделано не было [11]. Можно только отметить, что по мере увеличения размерности базиса РС проектор  $\Pi_{\Phi} \rightarrow \mathbf{I}$  и смещение оценки сигнала стремится к тому уровню, который обеспечивает исходная декомпозиция (40).

Следовательно, в тех задачах сигнальной обработки, где существуют благоприятные условия наблюдаемости сигнала, можно рассчитывать на то, что снижение статистической состав-

ляющей погрешности в результате проекционного преобразования базиса будет более существенным, чем сопровождающее это преобразование увеличение систематической погрешности.

Возможны и другие подходы. Так, базис (42) образуется в результате проектирования базиса  $\Psi$  на подпространство РС. Логично предположить, что полезными свойствами может обладать и обратная проекция, а именно, базиса  $\Phi$  на подпространство, порождаемое базисом  $\Psi$ :

$$\Phi_{\Psi} = \Pi_{\Psi} \Phi, \quad (48)$$

где

$$\Pi_{\Psi} = \Psi(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \quad (49)$$

— соответствующий оператор ортогонального проектирования.

Необходимым условием существования такого базиса является неравенство  $N \leq Q$ .

Проекционный базис (48) «наследует» от базиса  $\Phi$  малую статистическую погрешность оценивания сигнала, а проектор (49) обеспечивает снижение систематической составляющей ошибки. В этом отношении проекционный базис (48) можно назвать дуальным дополнением к базису (42).

## 5. ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИМЕНЕНИЙ

Некоторые оценки эффективности для родственного методу РС оккамовского оценивания даны в [5, 6], где представлены результаты модельных экспериментов, иллюстрирующих применение базиса собственных векторов матрицы Фишера, отобранных по старшинству собственных чисел (Критерий 1 по нашей терминологии). Содержащиеся в [5, 6] примеры включают в себя задачи восстановления изображений, фильтрации и спектроскопии. Методами математического моделирования проиллюстрировано улучшение качества оценок по сравнению с традиционными технологиями, не использующими усеченные базисные представления.

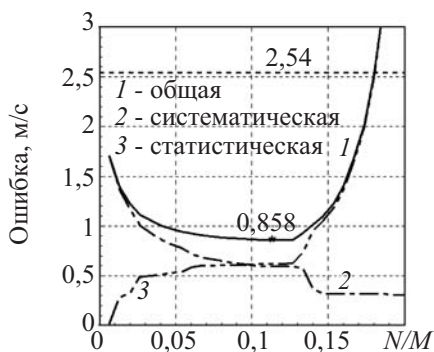


Рис. 1. Зависимость средних по  $z$  погрешностей от размерности базиса РИС.

Что касается метода РИС, то детали оценки его эффективности даны в [7, 8] на примере задач реконструктивной акустической томографии океанических сред. Некоторые результаты указанных исследований рассматриваются ниже.

Обсуждаемая задача состоит в оценивании распределения поля скорости звука  $c(x, y, z)$  в океанической среде на основе наблюдения прохождения звуковых сигналов по определенным трассам. Данная задача имеет большое значение в океанологии, поскольку по оценкам скорости звука возможно оценить температурные поля в водной среде и на их основе спрогнозировать долговременные погодные и климатические изменения планетарного масштаба.

В теоретических работах данного направления часто ограничиваются практически важной моделью вертикально-стратифицированного океанического волновода, в котором  $c(x, y, z) = c(z)$ , т.е. скорость звука зависит только от вертикальной координаты  $z$  точки наблюдения и не зависит от ее горизонтальных координат. Такая же модель принята в [7, 8]. При этом вертикальный профиль скорости звука (ВПСЗ) выбран в следующем виде:

$$c(z) = c_0(z) + \sum_{k=1}^{N_m} \beta_k \psi_k(z), \quad (50)$$

где  $c_0(z)$  — среднестатистический (известный) профиль, а второе слагаемое — возмущение профиля вследствие движения океанических водных масс, которое, в свою очередь, может

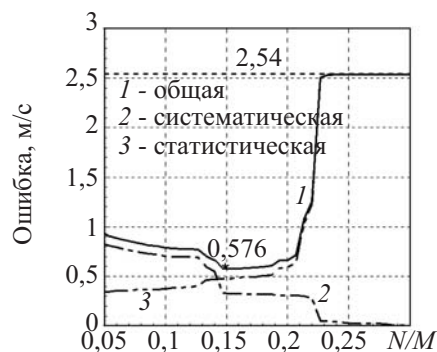


Рис. 2. Зависимость погрешностей от размерности проекционного базиса РИС.

быть описано конечной совокупностью так называемых бароклинных мод  $\{\psi_k(z)\}_{k=1}^{N_m}$  с неизвестными амплитудами  $\{\beta_k\}_{k=1}^{N_m}$ .

Предполагалось, что излучение сигнала осуществляется изотропным источником малых волновых размеров, а прием — вертикальной линейной эквидистантной решеткой, расположенной в дальней зоне источника. При указанных предположениях в [7] получены соответствующие выражения для матрицы Фишера, из собственных векторов которой затем по Критерию 2 формировался базис РИС.

Необходимые при этом коэффициенты разложения  $\{\gamma_k\}_{k=1}^{N_m}$  априори неизвестного ВПСЗ рассчитывались по среднестатистическому профилю  $c_0(z)$ , который известен. Далее по методике, описанной выше в разделе 3, находились нижние границы погрешностей оценивания скорости звука  $c(z)$ , усредненные по  $z$ . Некоторые результаты расчетов показаны на рис. 1, 2.

На рис. 1 представлена зависимость погрешностей оценивания скорости звука от отношения размерности  $N$  базиса РИС к полной размерности восстанавливаемого вектора поля скорости звука  $M$ . Из рис. 1 видно, что с расширением базиса РИС систематическая погрешность убывает, а статистическая погрешность растет. В результате при относительной размерности базиса  $N_0 / M = 0,113$  наблюдается оптимум по величине суммарной средней по глубине погрешности  $d_c$ .

С целью сравнения проводился также расчет погрешности и для задачи оценивания непосредственно коэффициентов разложения (50), т.е. в исходном физическом базисе. В этом случае систематическая погрешность, очевидно, отсутствует, а все ошибки обусловлены только конечным объемом наблюдений. Соответствующий уровень погрешности показан на рис. 1, 2 пунктиром.

Нетрудно видеть, что оптимизация базиса по предлагаемой методике обеспечивает в данном примере снижение результирующей ошибки оценивания поля  $c_0(z)$  почти в 3 раза. При дальнейшем расширении базиса РИС начиная с относительной размерности  $N_0 / M = 0,182$  эффективность физического базиса оказывается выше.

Отметим, что указанное улучшение точности оценок достигнуто даже с учетом замены точных значений коэффициентов разложения априори неизвестного ВПСЗ коэффициентами для среднестатистического профиля  $c_0(z)$ .

На рис. 2 показаны аналогичные результаты для базиса (42), образованного проектированием мод  $\{\psi_k(z)\}_{k=1}^{N_m}$  на подпространство РИС. Заметим, что в отличие от базиса РИС в «чистом» виде, в данном случае фактическая размерность базиса такая же, как для физического базиса, т.е. равна количеству мод в исходном разложении (50). Поэтому параметром, отложенным по оси абсцисс (рис. 2), является относительная размерность вспомогательного базиса РИС, формирующего проектор (36).

Из сопоставления рис. 1 и 2 видно, что эффективность проекционного базиса для рассматриваемых условий почти в 1,5 раза выше, чем для базиса РИС в «чистом» виде. Достигается такое повышение эффективности главным образом за счет снижения систематической составляющей ошибки измерений, что обеспечивается привлечением дополнительной априорной информации о структуре поля  $c(z)$ , т.е. выражения (50). При этом эффективность проекционного базиса не может быть ниже, чем для исходного физического базиса. Так, на рис. 2 начиная с относительной размерности вспомогательного

базиса  $N_0 / M = 0,23$ , эффективности проекционного и физического базисов совпадают.

Рассмотренные результаты позволяют предположить, что одним из перспективных направлений использования метода РИС могло бы стать проекционное улучшение известных в теории и технике DSP базисов, что позволит их адаптировать под условия статистических измерений.

Еще одной областью применения метода РИС может стать задача информационного сжатия сигналов физического источника сообщений, рассмотренная в [10]. Обычно такие задачи решаются для сигналов, прошедших предварительную очистку от шумов и только после устранения искажений оборудования регистрации. Достоинством метода РИС является то, что все эти этапы могут быть объединены в единую процедуру.

Действительно, в основе метода лежит использование статистических характеристик ошибок восстановления сигнала. В свою очередь, ошибки восстановления зависят как от шумов, так и от искажений оборудования регистрации. Поэтому достаточно учесть все указанные воздействия в структуре информационного оператора Фишера. Именно такой подход предложен в [10]. Однако, дальнейшего развития эти предложения не нашли.

В то же время, в настоящее время доминирующее положение в области информационного сжатия данных заняла технология так называемого Compressive Sensing (CS), что обычно переводится как «сжатое измерение (регистрация)» сигнала [20, 21].

Основой метода CS является решение оптимизационной задачи восстановления сигнала по разреженному данным в метрике  $L_1$  с ограничениями в метрике  $L_2$ . Прямого отношения к технологиям PCA метод CS не имеет, однако, возможно их сочетание, как, например, предложено в [22].

Можно ли подобным же образом сочетать технологию CS с методом РИС, пока неясно. Вопрос требует самостоятельного и детального исследования. Не исключено, что такое исследова-



ние могло бы привести к теоретически интересным и практически полезным результатам.

Также хотелось бы обратить внимание на возможность применения метода РС в ММО технологиях, которые являются актуальным направлением развития телекоммуникационных систем, и которым отводится важнейшая роль в системах беспроводного доступа 5G.

В основе технологий ММО лежит оценивание передаточной матрицы каналов  $\mathbf{H}$ , которая затем используется для улучшения эффективности передачи данных [13, 14]. При этом важную роль играют декомпозиции матрицы  $\mathbf{H}$ , среди которых в настоящее время в основном применяется разложение SVD.

Из материалов настоящей статьи следует, что более эффективным методом может стать обсуждаемый метод РС. Действительно, рассмотренная в разделе 2 модель уравнения наблюдений (10) соответствует стандартной модели для ММО систем. Основное отличие состоит в том, что оценивание канала в методе РС неразрывно связано с основной задачей — оцениваем (восстановлением) полезного сигнала. С этих позиций декомпозиция должна подвергаться не отдельно матрица канала  $\mathbf{H}$ , а матрица Фишера (13).

Очевидным достоинством такого подхода является включение в рассмотрение не только матрицы  $\mathbf{H}$ , но и корреляционной матрицы помех  $\mathbf{R}_n$ . Напомним, что к помехам мы относим сторонние сигналы других телекоммуникационных систем или интерференцию сигналов разных пользователей. Такого рода помехи обычно имеют сильную коррелированность по пространству, учет которой является значительным резервом для повышения эффективности приема. В методе РС учет таких свойств помехи входит естественным образом в саму структуру алгоритмов обработки, чего нет в традиционном методе SVD.

Еще одним источником повышения эффективности ММО систем может быть отбор компонент по критерию (27), что позволит исключить фактически ненаблюдаемые компоненты. Однако указанные преимущества метода РС в примене-

нии к ММО системам еще нуждаются во всестороннем анализе и обосновании, что, возможно, станет темой одной из последующих публикаций.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во многих задачах сигнальной обработки (восстановление изображений, идентификация систем, томография физических сред и др.) реальные сигналы, как правило, непосредственно недоступны для наблюдения, что часто приводит к неустойчивости оценок их параметров. В настоящем обзоре показано, что эффективным методом решения таких задач может быть использование усеченных сигнальных декомпозиций в базисе специального вида, сформированного из собственных функций информационного оператора Фишера. Эти функции, удовлетворяющие определенным критериям отбора, названы Главными Информативными Компонентами (РС) [7].

Достоинством базиса РС является простота разделения сигнального пространства на наблюдаемые и фактически ненаблюдаемые компоненты, что позволяет ограничить флуктуации оценки сигнала. Показано, что использование базиса РС всегда обеспечивает меньшую общую погрешность восстановления сигнала по сравнению с любыми методами его прямого оценивания.

Рассмотрена также комбинированная методика оптимизации координатного базиса [11], которая сочетает преимущества физического подхода (наглядность, экономичность) с преимуществами статистико-информационного подхода (минимизация статистических погрешностей). Указанная методика основана на проектировании произвольного координатного базиса на подпространство РС. В результате сокращается диапазон возможных флуктуаций оценки сигнала и понижается верхняя граница статистической ошибки его измерения.

Основанная на базисе РС методология имеет достаточно общий характер и может быть использована для решения широкого круга задач радиофизики, оптики, акустики и смежных научных дисциплин.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Oppenheim, A. V.; Schaffer, R. W.; Buck, J. R. *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. NJ: Prentice Hall, 1999. 897 p. ISBN 0-13-754920-2.
2. Jolliffe, I. T. *Principal Component Analysis / Springer Series in Statistics*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag Inc., 2010. 518 p. ISBN 0-387-95442-2.
3. Papoulis, A.; Pillai, S. P. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002. 861 p. ISBN 0-07-112256-7.
4. Aster, R. C.; Borchers, B.; Thurber, C. H. *Parameter Estimation and Inverse Problems*, 2nd ed. New York: Academic Press, 2012. 377 p. ISBN 978-0-12-385048-5.
5. Теребиж, В.Ю. *Введение в статистическую теорию обратных задач*. М.: Физматлит, 2005. 376 с. ISBN 5-9221-0562-0.
6. Теребиж, В.Ю. “Восстановление изображений при минимальной априорной информации,” *Успехи физических наук*, Т. 165, № 2, С. 143-176, 1995. DOI: [10.3367/UFNr.0165.199502b.0143](https://doi.org/10.3367/UFNr.0165.199502b.0143).
7. Калужный, А. Я. “Алгебраизация задач акустической томографии среды с использованием главных информативных компонент,” *Акустичний вісник*, Т. 1, № 4, С. 19-32, 1998. URI: <http://dspace.nbu.gov.ua/handle/123456789/894>.
8. Kalyuzhny, A. Y.; Krasny, L. G. “Method of the main informative components for acoustic tomography,” *J. Acoustical Soc. America*, Vol. 105, No. 2, p. 1178, 1999. DOI: [10.1121/1.425573](https://doi.org/10.1121/1.425573).
9. Kalyuzhny, A. Y.; Kovtonyuk, A. A. “Method of the principal informative components for reconstruction problems,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process*, ICASSP-2000, 5-7 June 2000, Istanbul, Turkey. IEEE, 2000, Vol. 1, pp. 169-172. DOI: [10.1109/ICASSP.2000.861902](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2000.861902).
10. Kalyuzhny, A. Y.; Kovtonyuk, A. A. “Optimal algebraic coding of noisy and distorted images,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Information Technology: Coding and Computing*, ITCC-2001, 2-4 Apr. 2001, Las Vegas, USA. IEEE, 2001, p. 537-541. DOI: [10.1109/ITCC.2001.918852](https://doi.org/10.1109/ITCC.2001.918852).
11. Kalyuzhny, A. Y.; Kovtonyuk, A. A. “PIC-projection technique for decreasing of statistical error in signals reconstruction problems,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process*, ICASSP-2001, 7-11 May 2001, Salt-Lake City, USA. IEEE, 2001, Vol. 6, p. 3917-3920. DOI: [10.1109/ICASSP.2001.940700](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2001.940700).
12. Kalyuzhny, A. Y.; Kovtonyuk, A. A. “Basis of the Principal Informative Components for signal estimation problems,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process*, ICASSP-2002, 13-17 May 2002, Orlando, USA. IEEE, 2002, Vol. 1, p. 335-338. DOI: [10.1109/ICASSP.2002.5744937](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2002.5744937).
13. Zhao, L.; Zhao, H.; Zheng, K.; Xiang, W. *Massive MIMO in 5G Networks: Selected Applications / Springer-Briefs in Electrical and Computer Engineering*. Springer International Publishing AG, 2012. 106 p. ISBN 978-3-319-68408-6.
14. Molisch, A. F. *Wireless Communication*, 2nd ed. John Wiley & Sons Ltd., 2011. 884 p. ISBN 9780470666692.
15. Kay, S. M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. University of Rhode Island. NJ: Prentice Hall, 1998. 603 p. ISBN 0-13-345711-7.
16. Horn, R. A.; Johnson, C. R. *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2013. 662 p. ISBN 9780521548236.
17. Kalman, R. E. “Contributions to the theory of optimal control,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, Vol. 5, pp. 102-119, 1960.
18. Sage, A. P.; White, C. C. *Optimum System Control*. 2nd ed. NJ: Prentice-Hall, Inc., 1977. p. 392. ISBN 0-13-638296-7.
19. [https://oleksa-site.blogspot.com/p/blog-page\\_11.html](https://oleksa-site.blogspot.com/p/blog-page_11.html).
20. Carmi, A. Y.; Mihaylova, L. S.; Godsill, S. J. *Compressed Sensing & Sparse Filtering*. Springer Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2014. 505 p. ISBN 978-3-642-38397-7.
21. Pfander, G. E. (ed.). *Sampling Theory, a Renaissance. Compressive Sensing and Other Developments*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. 532 p. ISBN 978-3-319-19748-7.
22. Andras, I.; Dolinsky, P.; Michaeli, L.; Saliga, J. “Sparse signal acquisition via compressed sensing and principal component analysis,” *Meas. Sci. Rev.*, Vol. 18, No. 5, p. 175-182, 2018. DOI: [10.1515/msr-2018-0025](https://doi.org/10.1515/msr-2018-0025).

Поступила в редакцию 04.06.2019

После доработки 24.11.2019

Принята к публикации 24.11.2019

---



---

**INFORMATION ON THE ARTICLE**


---

METHOD OF PRINCIPAL INFORMATIVE COMPONENTS IN PROBLEMS OF STATISTICAL MEASUREMENTS OF SIGNAL PARAMETERS (SYSTEMATIC REVIEW)

**O. Y. Kaliuzhnyi**, ORCID: 0000-0001-7676-3862, oleksa.yakov@gmail.com, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Ukraine

The method of Principal Informative Components (PIC) is presented for problems of statistical measurements, where the signal to be measured cannot be directly observed. Such situations include image reconstruction, system identification, communication channel reversal, media tomography, etc. The common feature of such problems, usually, is instability of their solutions to small variations of initial data that generally require the attraction of special methods of regularization. The basic principle of PIC method consists in employing decomposition of signals in special bases that were formed from eigenvectors of Fischer's information operator. These bases are related to the method of Principal Components Analysis (PCA), which is well known in statistics, however, they have a somewhat different meaning as compared to the PCA method. The review indicates that by using the special procedures for selecting coordinate vectors, it is possible, first, to guarantee the signal estimation stability to unpredictable factors of problem and, second, to ensure a significant reduction of total measurement error as compared to the "direct" signal estimation, i.e., without the use of basis notions. The review presents a substantiation of PIC method application for problems of linear and nonlinear estimation. The composite technique of coordinate basis optimization is also considered that combines advantages of the physical approach (obviousness and effectiveness) with advantages of statistically informative approach (minimization of statistical errors). The specified technique is based on projecting the arbitrary coordinate basis on PIC subspace. As a result, the range of possible fluctuations of signal estimation is reduced and the upper bound of statistical error of signal measurement is lowered. Some numerical estimates of the PIC method efficiency are given using the example of problem of medium acoustic tomography that confirms the general theoretical conclusions. The review includes the analysis of some information technologies, where the ideas of PIC method hold a good promise for practical application. In particular, it is suggested that one of such promising fields can be MIMO systems that play an important part in 5G wireless access systems.

**Keywords:** inverse statistical problem; signal decomposition; Fischer's matrix; PIC basis; principal informative component basis; signal observability criterion; projection operator; MIMO system; 5G

#### REFERENCES

- Oppenheim, A.V.; Schaffer, R.W.; Buck, J.R. *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed. NJ: Prentice Hall, 1999. ISBN 0-13-754920-2.
- Jolliffe, I.T. *Principal Component Analysis / Springer Series in Statistics*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag Inc., 2010. ISBN 0-387-95442-2.
- Papoulis, A.; Pillai, S.P. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. New York: McGraw-Hill, 2002. ISBN 0-07-112256-7.
- Aster, R.C.; Borchers, B.; Thurber, C.H. *Parameter Estimation and Inverse Problems*, 2nd ed. New York: Academic Press, 2012. ISBN 978-0-12-385048-5.
- Terebizh, V.Yu. *Introduction to the Statistical Theory of Inverse Problems* [in Russian]. Moscow: Fizmatlit, 2005. ISBN 5-9221-0562-0.
- Terebizh, V.Yu. "Image restoration with minimum a priori information," *Physics-Uspokhi*, v.38, p.137, 1995. DOI: [10.1070/PU1995v038n02ABEH000068](https://doi.org/10.1070/PU1995v038n02ABEH000068).
- Kalyuzhnyi, A.Ya. "An algebraization of the acoustic tomography problem using the principal informative components," *Akustychnyi Visnyk*, v.1, n.4, p.19, 1998. URI: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/894>.
- Kalyuzhny, A.Y.; Krasny, L.G. "Method of the main informative components for acoustic tomography," *J. Acoustical Soc. America*, v.105, n.2, p.1178, 1999. DOI: [10.1121/1.425573](https://doi.org/10.1121/1.425573).
- Kalyuzhny, A.Y.; Kovtonyuk, A.A. "Method of the principal informative components for reconstruction problems," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process.*, ICASSP-2000, 5-7 June 2000, Istanbul, Turkey. IEEE, 2000, v.1, p.169-172. DOI: [10.1109/ICASSP.2000.861902](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2000.861902).
- Kalyuzhny, A.Y.; Kovtonyuk, A.A. "Optimal algebraic coding of noisy and distorted images," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Information Technology: Coding and Computing*, ITCC-2001, 2-4 Apr. 2001, Las Vegas, USA. IEEE, 2001, p.537-541. DOI: [10.1109/ITCC.2001.918852](https://doi.org/10.1109/ITCC.2001.918852).
- Kalyuzhny, A.Y.; Kovtonyuk, A.A. "PIC-projection technique for decreasing of statistical error in signals reconstruction problems," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process.*, ICASSP-2001, 7-11 May 2001, Salt-Lake City, USA. IEEE, 2001, v.6, p.3917-3920. DOI: [10.1109/ICASSP.2001.940700](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2001.940700).
- Kalyuzhny, A.Y.; Kovtonyuk, A.A. "Basis of the Principal Informative Components for signal estimation problems," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process.*, ICASSP-2002, 13-17 May 2002, Orlando, USA. IEEE, 2002, v.1, p.335-338. DOI: [10.1109/ICASSP.2002.5744937](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2002.5744937).
- Zhao, L.; Zhao, H.; Zheng, K.; Xiang, W. *Massive MIMO in 5G Networks: Selected Applications / SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering*. Springer International Publishing AG, 2012. ISBN 978-3-319-68408-6.
- Molisch, A.F. *Wireless Communication*, 2nd ed. John Wiley & Sons Ltd., 2011. ISBN 9780470666692.
- Kay, S.M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. University of Rhode Island. NJ: Prentice Hall, 1998. ISBN 0-13-345711-7.
- Horn, R.A.; Johnson, C.R. *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2013. ISBN 9780521548236.
- Kalman, R.E. "Contributions to the theory of optimal control," *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, v.5, p.102, 1960.
- Sage, A.P.; White, C.C. *Optimum System Control*, 2nd ed. NJ: Prentice-Hall, Inc., 1977. ISBN 0-13-638296-7.
- [https://oleksa-site.blogspot.com/p/blog-page\\_11.html](https://oleksa-site.blogspot.com/p/blog-page_11.html).
- Carmi, A.Y.; Mihaylova, L.S.; Godsill, S.J. *Compressed Sensing & Sparse Filtering*. New York, Dordrecht, London: Springer Heidelberg, 2014. ISBN 978-3-642-38397-7.
- Pfander, G.E. (ed.). *Sampling Theory, a Renaissance. Compressive Sensing and Other Developments*. Springer International Publishing Switzerland, 2015. ISBN 978-3-319-19748-7.
- Andras, I.; Dolinsky, P.; Michaeli, L.; Saliga, J. "Sparse signal acquisition via compressed sensing and principal component analysis," *Meas. Sci. Rev.*, v.18, n.5, p.175, 2018. DOI: [10.1515/msr-2018-0025](https://doi.org/10.1515/msr-2018-0025).

Received June 4, 2019

Revised November 24, 2019

Accepted November 24, 2019