

УДК 535.317.1

ОЦЕНИВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА*

Е. Д. ПРИЛЕПСКИЙ, Я. Е. ПРИЛЕПСКИЙ

*Астонский университет,
Великобритания, Бирмингем, В4 7ЕТ*

Аннотация. В работе исследованы регуляризующие свойства дискретизации в пространстве выходных сигналов для линейных некорректных операторных уравнений с зашумленными данными. Суть предлагаемого метода заключается в том, чтобы выбирать уровень дискретизации, который выступает в качестве параметра регуляризации в этом контексте, по принципу равенства случайной и детерминистической составляющих погрешностей восстановления входного сигнала. Показано, что данный метод, т. е. решение, дискретное по выходному сигналу, устойчив к малым погрешностям в выходном сигнале. При этом, при заданном уровне погрешности измерения выходного сигнала ошибка восстановления входного сигнала однозначно связана с шагом дискретизации выходного сигнала, что позволяет корректно и обоснованно выбирать параметр регуляризации для заданного определенного критерия, например — для заданной погрешности измерения. Конкретные расчеты и примеры приведены в явном виде для одномерного случая, что не ограничивает общности предлагаемого метода.

Ключевые слова: восстановление сигнала; восстановление изображения; линейный регуляризирующий алгоритм оценивания оптимального параметра; задача регуляризации

1. ВВЕДЕНИЕ

Математической моделью стационарных измерительных систем является интегральное уравнение первого рода с разностным ядром [1, 2]:

$$\int g(\rho)h(r-\rho)d\rho = f(r), \quad (1)$$

где $h(r-\rho)$ — импульсный отклик системы (функция рассеяния точки).

Известны возникающие принципиальные и практические трудности при анализе (1). Ядро преобразования $h(r-\rho)$ в (1) отражает сглаживающие свойства прибора или метода

измерений в целом. Для реальной измерительной системы возникает задача поиска соответствия между выходным сигналом $f(r)$ и искомым входным сигналом $g(\rho)$, что требует решения интегрального уравнения (1).

С математической точки зрения необходимо найти решение интегрального уравнения первого рода (1), что является некорректно поставленной задачей [1–3] в смысле определения, что решение такой задачи чрезвычайно чувствительно к малым изменениям данных измерения (т. е. функции $f(r)$).

Таким образом, особенностью процесса восстановления входного сигнала является не-

* Авторы благодарны Leverhulme Trust project RPG-2018-063 за частичную поддержку данного исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов, А. Н.; Арсенин, В. Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979.
2. Морозов, В. А. *Методы регуляризации неустойчивых задач*. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1987.

3. Бакушинский, А. Б.; Гончарский, А. В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1989.
4. Benning, M.; Burger, M. "Modern regularization methods for inverse problems," *Acta Numerica*, Vol. 27, P. 1-111, 2018. DOI: [10.1017/S0962492918000016](https://doi.org/10.1017/S0962492918000016).
5. Tanana, V. P.; Sidikova, A. I. *Optimal Methods for Ill-Posed Problems. With Applications to Heat Conduction*. Berlin-Boston: De Gruyter, 2018. ISBN: 978-3-11-057721-1.
6. Ugayraj; Mulani, K.; Talukdar, P.; Das, A.; Alagirusamy, R. "Performance analysis and feasibility study of ant colony optimization, particle swarm optimization and cuckoo search algorithms for inverse heat transfer problems," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 89, P. 359-378, 2015. DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.015](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.015).
7. Stille, M.; Kleine, M.; Hägele, J.; Barkhausen, J.; Buzug, T. M. "Augmented likelihood image reconstruction," *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol. 35, No. 1, P. 158-173, 2016. DOI: [10.1109/TMI.2015.2459764](https://doi.org/10.1109/TMI.2015.2459764).
8. Gass, T.; Székely, G.; Goksel, O. "Consistency-based rectification of nonrigid registrations," *J. Medical Imaging*, Vol. 2, P. 014005, 2015. DOI: [10.1117/1.JMI.2.1.014005](https://doi.org/10.1117/1.JMI.2.1.014005).
9. Turitsyn, S. K.; Prilepsy, J. E.; Le, S. T.; Wahls, S.; Frumin, L. L.; Kamalian, M.; Derevyanko, S. A. "Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives," *Optica*, Vol. 4, No. 3, P. 307-322, 2017. DOI: [10.1364/OPTICA.4.000307](https://doi.org/10.1364/OPTICA.4.000307).
10. Adler, J.; Öktem, O. "Solving ill-posed inverse problems using iterative deep neural networks," *Inverse Problems*, Vol. 33, No. 12, 124007, 2017. DOI: [10.1088/1361-6420/aa9581](https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa9581).
11. Kaltenbacher, B. "Regularization by projection with a posteriori discretization level choice for linear and nonlinear ill-posed problems," *Inverse Problems*, Vol. 16, No. 5, P. 1523-1539, 2000. DOI: [10.1088/0266-5611/16/5/322](https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/5/322).
12. Kaltenbacher, B.; Oftermatt, J. "A convergence analysis of regularization by discretization in preimage space," *Math. Comp.*, Vol. 81, P. 2049-2069, 2012. DOI: [10.1090/S0025-5718-2012-02596-8](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2012-02596-8).
13. Kaltenbacher (Blaschke), B.; Engl, H. W.; Grever, W.; Klibanov, M. "An application of Tikhonov regularization to phase retrieval," *Nonlinear World*, Vol. 3, P. 771-786, 1996.
14. Kaltenbacher, B. "Boundary observability and stabilization for Westervelt type wave equations without interior damping," *Appl. Math. Optim.*, Vol. 62, No. 3, P. 381-410, 2010. DOI: [10.1007/s00245-010-9108-7](https://doi.org/10.1007/s00245-010-9108-7).
15. Довнар, Д. В.; Предко, К. Г. "Метод устранения прямолинейного равномерного смаза изображения," *Автометрия*, № 6, С. 94-97, 1984. URI: https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1984/6/94-97.pdf.
16. Довнар, Д. В.; Предко, К. Г. "Использование ортогонализации изображений базисных функций для регуляризованного восстановления сигнала," *ЖВММФ*, Т. 26, № 7, С. 981-993, 1986. URI: <http://mi.mathnet.ru/zvmmf3969>.
17. Воскобойников, Ю. Е. "Оценивание оптимального параметра регуляризации итерационного вейвлет-алгоритма восстановления сигналов," *Автометрия*, Т. 49, № 2, С. 12-21, 2013. URI: https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/2013/2/05_vosk.pdf.
18. Воскобойников, Ю. Е.; Литасов, В. А. "Устойчивый алгоритм восстановления изображения при не точно заданной аппаратной функции," *Автометрия*, Т. 42, № 6, С. 3-15, 2006. URI: https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/2006/6/3-15.pdf.
19. Pereverzev, S.; Schock, E. "On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems," *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 43, No. 5, P. 2060-2076, 2006. URI: <https://www.jstor.org/stable/4101307>.
20. Минц, М. Ю.; Прилепский, Е. Д. "Метод оцифровки изображения примененный к внешнему объекту при восстановлении," *Оптика и спектроскопия*, Т. 75, С. 696, 1993.
21. Luttrell, S. P. "A new method of sample optimization," *Optica Acta*, Vol. 32, No. 3, P. 255-257, 1985. DOI: [10.1080/713821739](https://doi.org/10.1080/713821739).
22. Frieden, B. R. "Image-restoration using a norm of maximum information," *Optical Engineering*, Vol. 19, No. 3, P. 290-296, 1980. DOI: [10.1117/12.7972512](https://doi.org/10.1117/12.7972512).
23. Kido, K. *Discrete Fourier Transform*, in *Digital Fourier Analysis: Fundamentals. Undergraduate Lecture Notes in Physics*. New York: Springer, 2015. DOI: [10.1007/978-1-4614-9260-3_4](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9260-3_4).
24. Борн, М.; Вольф, Э. *Основы оптики*. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 10.09.2017

После переработки 18.08.2018