УДК 621.372.54.372

ТРИФОНОВ И. И., СКИБА К. С.

АППРОКСИМАЦИЯ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Рассмотрены методика и пример решения задачи аппроксимации АЧХ рекурсивных цифровых полосовых фильтров с любым соотношением степеней полиномов числителя и знаменателя передаточной функции и заданной функцией гарантированного затухания в полосах задерживания.

Передаточные функции рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ) описываются рациональными дробями с вещественными коэффициентами [1]

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{M} a_i z^{-i}}. \tag{1}$$

Дробь (1) имеет $N+M+1$ варьируемых параметров (коэффициентов b_i и a_i), которые можно использовать для аппроксимации заданных частотных характеристик синтезируемых фильтров. Число элементов задержки (памяти) при прямой форме реализации передаточной функции (1) равно наибольшему из N и M значению.

Передаточные функции РЦФ будем представлять двумя функциями:

$$\begin{gathered} H_1(z)=b_0\left(1+\alpha_1 z^{-1}\right)\left(1+\alpha_2 z^{-1}\right)\prod_{i=1}^{m}\left(1+\gamma_i z^{-1}+z^{-2}\right); \\ H_2(z)=\prod_{i=1}^{M/2}\left(1+\alpha_{i1} z^{-1}+\alpha_{i2} z^{-2}\right), H(z)=H_1(z)/H_2(z), \end{gathered} \tag{2}$$

где M — четное число. Полагая $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$ (где $x = \omega T$, $T = 1/2f_{д}$ — интервал дискретизации), найдем комплексную передаточную функцию $H(\mathrm{j}x) = H_1(\mathrm{j}x)/H_2(\mathrm{j}x)$, где

$$H_1(\mathrm{j}x) = b_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}mx} \cdot 2^m \prod_{i=1}^{2} \left(1 + \alpha_i \cos x - \mathrm{j}\alpha_i \sin x\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(0{,}5\gamma_i + \cos x\right),$$

$$H_2(\mathrm{j}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}Mx/2} \prod_{i=1}^{M/2} \left[\alpha_{1i} + (1 + \alpha_{2i} \cos x) + \mathrm{j}(1 - \alpha_{2i} \sin x)\right].$$

АЧХ равна

$$H(x) = \left|H(\mathrm{j}x)\right| = \sqrt{H(\mathrm{j}x) H(-\mathrm{j}x)} = \sqrt{Q(x)/Q_1(x)},$$

где

$$Q(x) = H_1(\mathrm{j}x) H_1(-\mathrm{j}x) = b_{01}\left(1 + d_1 \cos x\right)\left(1 + d_2 \cos x\right) \cdot \prod_{i=1}^{m} \left(0{,}5\gamma_i + \cos x\right)^2,$$

$$d_i = 2\alpha_i / \left(1 + \alpha_i^2\right), \quad Q_1(x) = H_2(\mathrm{j}x) H_2(-\mathrm{j}x) = \sum_{i=0}^{M} c_i \cos^i x,$$

Обозначим

$$y = \cos x, \; R(y) = \sqrt{b_{01}(1 + d_1 y)(1 + d_2 y) / \prod_{i=0}^{M} c_i y^i} \left(\sum_{i=0}^{m-1} G_i y^i + y^m\right).$$

Тогда $H(y) = \left|R(y)\right|$. Функция затухания $a(y) = -20\lg H(y)$ дБ. Введем взвешенную функцию погрешности аппроксимации АЧХ в полосе задерживания: $R_1(y) = W(y) \cdot R(y)$, где $W(y) = 10^{0{,}05\Delta a_0(y)}$ — весовая функция, которая позволяет учесть функциональную зависимость требуемого затухания $a_0(y)$ в полосе задерживания, $\Delta a_0(y) = a_0(y) - a_{\min}$, $a_{\min}$ — минимальное значение требуемого затухания в полосе задерживания (рис. 1).

Постановка задачи аппроксимации. Найти такие значения параметров дроби (1), при которых: в полосе пропускания $f_{п1} \le f \le f_{п}$ минимальное затухание равно нулю, а максимальное — не превышает величины Δa; в полосах задерживания $0 \le f \le f_{з1}$ и $f_{з} \le f \le f_{д} = 1/2T$ затухание не менее $a_0(f)$ (кривая *1* на рис. 1); число коэффициентов $N + m + 3$ полиномов (2), определяющее количество умножителей в составе фильтра, было бы минимально возможным.

На рис. 1 графически приведен возможный вариант требований к характеристике затухания (кривые *1*). Кривые *2* на этом рисунке соответствуют опти-