УДК 621.317.784

ДУБИНОВ А. Е., САЙКОВ С. К.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С ВОЛНОВОДНЫМ СВЧ-МЕТОДОМ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Получено точное аналитическое решение трансцендентного уравнения, связанного с измерением комплексной диэлектрической постоянной твердых и жидких веществ в диапазоне СВЧ волноводным методом.

Для исследования комплексной диэлектрической постоянной твердых и жидких веществ в диапазоне СВЧ получил широкое распространение волноводный метод, основанный на одновременном измерении коэффициента бегущей волны $K_б$ и определении расстояния x_m от поверхности исследуемого вещества до первого узла стоячей волны [1]. В процессе обработки результатов этих измерений для определения постоянной распространения волны γ, а затем и диэлектрической постоянной ε, возникает необходимость решения следующего трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{th}\gamma d}{\gamma d} = -\mathrm{i}\,\frac{\lambda}{2\pi d}\,\frac{K_б - \mathrm{i}\operatorname{tg}\dfrac{2\pi x_m}{\lambda}}{1 - \mathrm{i}K_б\operatorname{tg}\dfrac{2\pi x_m}{\lambda}}\,, \tag{1}$$

где d — толщина исследуемого вещества; λ — длина волны в волноводе.

Как отмечается в [1], основная трудность данного метода связана с невозможностью аналитического решения уравнения (1) и с неоднозначностью, обусловленной периодичностью входящих в него функций. До сих пор это уравнение решалось либо графически, либо методом последовательных приближений численно.

Уравнение (1) может быть решено аналитически или методом Сиверта—Бурнистона [2], основанным на теории сингулярных интегральных уравнений, или методом Люка—Стивенса [3], основанным на известной теореме Коши, определяющей значение интеграла вдоль замкнутого контура, который охватывает простой полюс на комплексной плоскости. Решения, получаемые этими методами, представляют собой очень громоздкие и неудобные для вычислений выражения, содержащие не берущиеся аналитически комплексно-значные интегралы.

В данной статье приводится простое точное аналитическое решение уравнения (1) относительно γ. Это решение удалось получить с помощью новых трансцендентных функций, обобщающих W-функцию Ламберта: W_t- и W_c-функций, математические свойства которых подробно рассмотрены в [4].