УДК 621.391.2

СОВМЕСТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СМЕШАННЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

С. Я. ЖУК

Синтезированы оптимальный и квазиоптимальный алгоритмы фильтрации смешанных марковских процессов в дискретном времени, в которых дискретный компонент является цепью Маркова, а непрерывный — состоит из отрезков марковских последовательностей. На основе критерия минимума апостериорного риска получено байесовское решающее правило для одного вида функции потерь. С помощью статистического моделирования на ЭВМ проведено сравнение известного и синтезированного квазиоптимальных алгоритмов фильтрации.

Для описания стохастических объектов со случайной структурой широко применяются смешанные марковские процессы. В монографиях [1, 2] решены задачи фильтрации дискретно-непрерывных марковских процессов и процессов со случайной структурой в непрерывном времени. Синтезированные фильтры относятся к классу устройств с обратной связью по решению.

Важным классом смешанных марковских процессов являются процессы в дискретном времени, в которых дискретный компонент является цепью Маркова, а непрерывный — состоит из отрезков марковских последовательностей. Один из способов синтеза оптимальных алгоритмов фильтрации этих процессов рассмотрен в работе [3]. Синтезированный оптимальный фильтр относится к классу устройств с растущей памятью. Квазиоптимальный алгоритм фильтрации получен в результате гауссовской аппроксимации апостериорной плотности вероятности (АПВ) непрерывного компонента смешанного марковского процесса.

В данной статье на основе теории условных марковских процессов [1] синтезированы рекуррентные оптимальный и квазиоптимальный алгоритмы фильтрации смешанных марковских процессов в дискретном времени.

Для синтеза алгоритма предлагаемым методом можно пользоваться уравнениями, описывающими смешанный процесс в дискретном времени:

$$x(k) = F[x(k-1), A(k)] + G[A(k)]\, w(k); \qquad (1)$$

$$y(k) = h[x(k), B(k)] + C[B(k)]\,v(k), \tag{2}$$

где $x(k)$ — N_1-мерный непрерывнозначный вектор; $A(k)$, $B(k)$ — цепи Маркова с состояниями a_j, $j=\overline{1, M_1}$, b_m, $m=\overline{1, M_2}$ и матрицами перехода $\Pi^1_{ij}(k, k-1)$, $i, j=\overline{1, M_1}$, $\Pi^2_{nm}(k, k-1)$, $n, m=\overline{1, M_2}$ соответственно; $F[\cdot]$ — N_1-мерная векторно-значная функция; $G[\cdot]$ — матрица размерности $N_1 \times N_2$; $w(k)$ — N_3-мерная некоррелированная гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $Q(k)$; $y(k)$ — N_2-мерный вектор измерения; $h[\cdot]$ — N_3-мерная векторнозначная функция; $C[\cdot]$ — матрица размерности $N_3 \times N_3$; $v(k)$ — N_3-мерная некоррелированная гауссовская последовательность с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R(k)$.

Следуя методике, предложенной в [1], обозначим совместную плотность вероятности смешанного процесса $\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m)$. Величина $\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m)\,dx(k)$ равна вероятности одновременного выполнения условий $x(k) \in (x(k), x(k)+dx(k))$, $A(k)=a_j$, $B(k)= b_m$. Марковская цепь $B(k)$ не зависит от процессов $x(k)$ и $A(k)$, поэтому совместную плотность вероятности смешанного процесса можно представить в виде

$$\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m) = \mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j)\,\mathbf{P}(B(k)=b_m). \tag{3}$$

Априорная вероятность $\mathbf{P}(B(k)=b_m)$ на каждом шаге k вычисляется по известному рекуррентному уравнению [1]. Процессы $x(k)$, $A(k)$ являются зависимыми и описываются совместной плотностью вероятности $\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j)$. Применяя аппарат теории марковских процессов [1], можно показать, что она описывается рекуррентным уравнением

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j) = \sum_{i=1}^{M_1} \Pi^1_{ij}(k, k-1)\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x(k)/x(k-1);\\ A(k)=a_j)\,\mathbf{P}(x(k-1), A(k-1)=a_i)\,dx(k-1),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Pi(x(k)/x(k-1), A(k)=a_j)$ — условная плотность вероятности, определяемая на основании уравнения (1). Из уравнений (3), (4) следует, что априорная совместная плотность вероятности $\mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m)$ вычисляется рекуррентно, а смешанный процесс относится к классу смешанных марковских процессов.

Используя методику синтеза оптимальных алгоритмов фильтрации марковских процессов в дискретном времени [1], можно получить рекуррентное уравнение для совместной «финальной» АПВ смешанных марковских процессов в виде

$$\begin{aligned}W(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m) = \mathbf{P}(y(k)/x(k), B(k)=b_m) \times\\ \times \sum_{i=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{M_2} \Pi^1_{ij}(k, k-1)\,\Pi^2_{nm}(k, k-1)\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(x(k)/x(k-1),\\ A(k)=a_j)\,W(x(k-1), A(k-1)=a_i, B(k-1)=\\ = b_n)\,dx(k-1)/\mathbf{P}(y(k)/Y(k-1)),\end{aligned} \tag{5}$$

где $W(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m) = \mathbf{P}(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m/Y(k))$ — совместная АПВ смешанного марковского процесса на k-м шаге; $\mathbf{P}(y(k)/x(k), B(k)=b_m)$ — одношаговая функция правдоподобия, определяемая на основании уравнения (2); $\mathbf{P}(y(k)/Y(k-1))$ — условная плотность вероятности, являющаяся нормирующим коэффициентом; $Y(k)=y(1), \ldots \ldots y(k)$ — последовательность измерений. Вводя обозначение совместной экстраполированной плотности вероятности (ЭПВ) $W^*(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m) = \mathbf{P}^*(x(k), A(k)=a_j, B(k)=b_m/Y(k-1))$ и применяя теорему умножения вероятностей, уравнение (5) можно представить в виде системы рекуррентных уравнений

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов В. И., Кульман Н. К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.— М. : Сов. радио, 1975.—705 с.

2. *Казаков И. Е., Артемьев В. М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры.— М. : Наука, 1980.—384 с.

3. *Ackerson C. A., Fuk S.* On state estimation in switching enviroments // IEEE Trans.: V-AC-15.— 1970.— No. 1.— P. 10—17.

4. *Тихонов В. И., Харисов В. Н., Смирнов В. А.* Оптимальная фильтрация дискретно-непрерывных процессов // Радиотехника и электроника.— 1978.— № 7.— С. 1441—1457.

5. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.— М. : Связь, 1976.—496 с.
6. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности н адаптация информационных систем.— М. : Сов. радио, 1977.—432 с.

Поступила в редакцию после переработки 15.01.87.